ARTIGO

CAVALIERI ATACA NOVAMENTE....

Ivail Muniz Junior (*)

A curiosidade e a imaginação sempre estiveram presentes na história da Matemática. Quando elas resolvem aportar em nossas aulas, situações inesperadas e interessantes acontecem. Esse pequeno artigo começou a ser desenhado no final de 2007, quando uma aluna, inteligente e curiosa, da segunda série do Ensino Médio, perguntou-me como poderíamos obter uma fórmula para o volume da calota esférica, utilizando argumentos parecidos com aqueles utilizados para os outros sólidos. Como tínhamos utilizado o *Princípio de Cavalieri* para encontrar fórmulas para os volumes de prismas, cilindros, pirâmides, cones e a esfera, Ananda perguntou-me como obter uma fórmula para a calota esférica. Inicialmente, disse que essa fórmula era bem mais complicada que as outras e que precisaríamos de técnicas mais poderosas para obtê-la.

Confesso que é o tipo de resposta que eu não gosto de dar para alunos, principalmente aos aplicados e curiosos, como era o caso de Ananda. Certamente, com algum tempo extra, tais alunos aprenderiam um pouco de cálculo, ou uma das fórmulas de Pappus-Guldin, o que nos permitiria chegar à fórmula da calota. Mas, como não havia tempo disponível para isso, e estávamos em uma aula de esfera, na qual tínhamos acabado de demonstrar a fórmula do volume da esfera, a curiosidade aportou novamente e me fiz a seguinte pergunta: Seria possível obter o volume da calota esférica[1] utilizando o Princípio de Cavalieri? Se fora possível com a esfera, por que não com uma parte (bem comportada por sinal) dela? Passei alguns exercícios para meus alunos e comecei imediatamente a pensar na questão. Ao final da aula, chamei a Ananda e vivi um grande momento. Compartilharei com os prezados leitores, nas próximas linhas, uma secção do que descobrimos.

O Princípio de Cavalieri.

[1] Em alguns livros utiliza-se o termo calota esférica para a superfície cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo contém o diâmetro da esfera e passa pelo centro da circunferência que contém o arco. Consideramos, neste artigo, a calota esférica como um sólido produzido a partir da seção de uma esfera.

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão, em 1598. Foi aluno de Galileu, e atuou como professor de Matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Deixou uma obra vasta abrangendo Matemática, Óptica e Astronomia.

Fig.1 - Bonaventura Cavalieri.
Disponível em **www.e-um.si/lessons/44/**

Em grande parte, foi o responsável pela introdução e difusão dos logaritmos na Europa. Sua grande contribuição à Matemática pode ser considerada a obra *Geometria indivisibilibus*, publicada em sua primeira versão em 1653. Nesse trabalho, ele apresenta dois resultados que podem ser assim sintetizados:

1) Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante;
2) Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

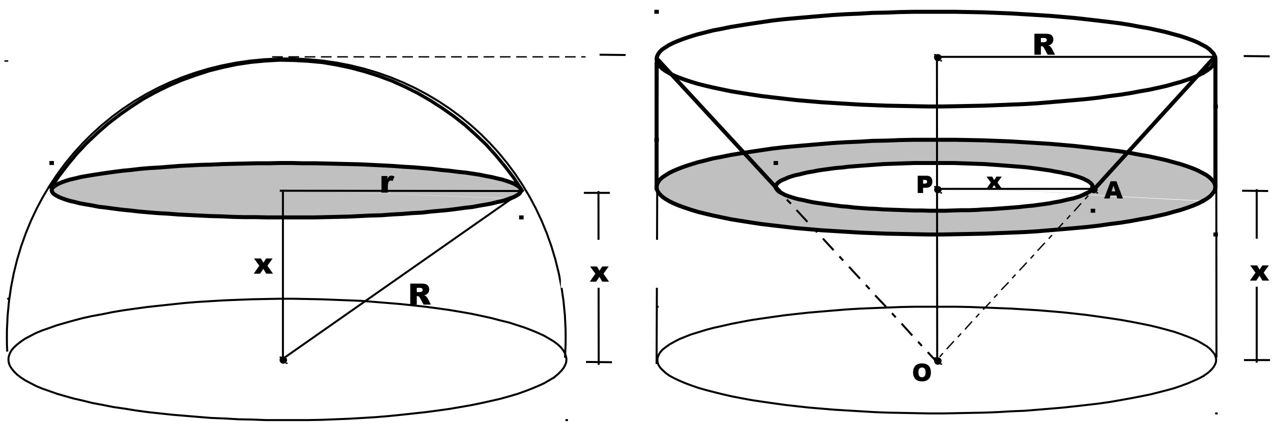
Do Princípio de Cavalieri podemos tirar então que, dados dois sólidos apoiados em um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

Não temos por objetivo neste artigo demonstrar o princípio de Cavalieri, visto que sua demonstração envolveria conceitos avançados da Teoria da Medida, conforme aponta (Lima, 1998, Vol 2, p. 257), o que foge do objetivo aqui proposto.

Apesar da demonstração não ser acessível ao aluno do Ensino Médio, a utilização de exemplos e argumentos que indiquem que ele seja verdadeiro são extremamente recomendáveis.

Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com a mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente mesmo volume.
Diminuindo a espessura tanto quanto se queira, os volumes das fatias ficarão cada vez mais próximos. Considerando que o volume dos sólidos é igual à soma dos volumes das fatias, podemos concluir que os volumes dos sólidos serão iguais. Exemplos de pilhas de baralhos iguais com o mesmo número de cartas em cada pilha, mas dispostas de formas diferentes, contribuem para a visualização e entendimento do principio de Cavalieri.

Uma aplicação interessante do princípio de Cavalieri, no Ensino Médio, é a obtenção do volume da esfera. Consideremos uma semi-esfera de Raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro de altura R e raio R, com a base também apoiada nesse plano (Fig.2). Desse cilindro, retiramos um cone, cuja base coincide com a do cilindro e de mesma altura. Chamaremos esse sólido de S.



$S_1 = \pi . r^2 = \pi . (R^2 - x^2)$

$S_2 = \pi . (R^2 - x^2)$

Fig.2

Observe que, para uma mesma altura x, um plano produz na esfera uma secção circular de área $S_1 = \pi\ .(R^2 - x^2)$ e, no sólido S, uma secção igual a uma coroa circular, de área $S_2 = \pi.(R^2 - x^2)$, conforme ilustra a figura 2. Como as áreas das secções são iguais, para qualquer plano horizontal que corte os dois sólidos, temos que o volume da semi-esfera é igual ao volume do sólido S. Assim, o volume da semi-esfera é igual ao volume de cilindro de altura R e raio R menos o volume de um cone de mesma base e altura.

Assim,

$$\frac{V_e}{2} = \pi R^2.R - \frac{1}{3}.\ \pi R^2.R = \frac{2}{3}.\pi R^3.$$

Logo o volume da esfera é igual a $\frac{4}{3}.\pi R^3$.

Cavalieri e a Calota Esférica.

Como vimos na seção anterior, o volume da esfera pode ser obtido, a partir do princípio de Cavalieri, comparando as secções produzidas por um plano que cortava uma esfera e um determinado sólido (este sólido, se duplicado, recebe o nome de *clépsidra*). Vejamos como utilizá-lo para encontrarmos uma fórmula para o volume da calota esférica.

Partindo da metade da *clépsidra* anterior, seja ψ o sólido obtido retirando-se do cilindro de altura h e raio R um tronco de cone de altura h, base maior coincidindo com a base do cilindro e base menor com raio igual a R – h (observe que o triângulo OPA é isósceles) (Fig.3). Como vimos, qualquer plano horizontal, distando ***d*** do centro da semi- esfera, bem como do vértice do cone, produzia secções equivalentes na esfera e na clépsidra. Isso inclui todas as seções produzidas quando d > R – h.

Considerando essa equivalência entre as secções, podemos mostrar que:

Volume da calota = Volume do cilindro – volume do tronco de cone.

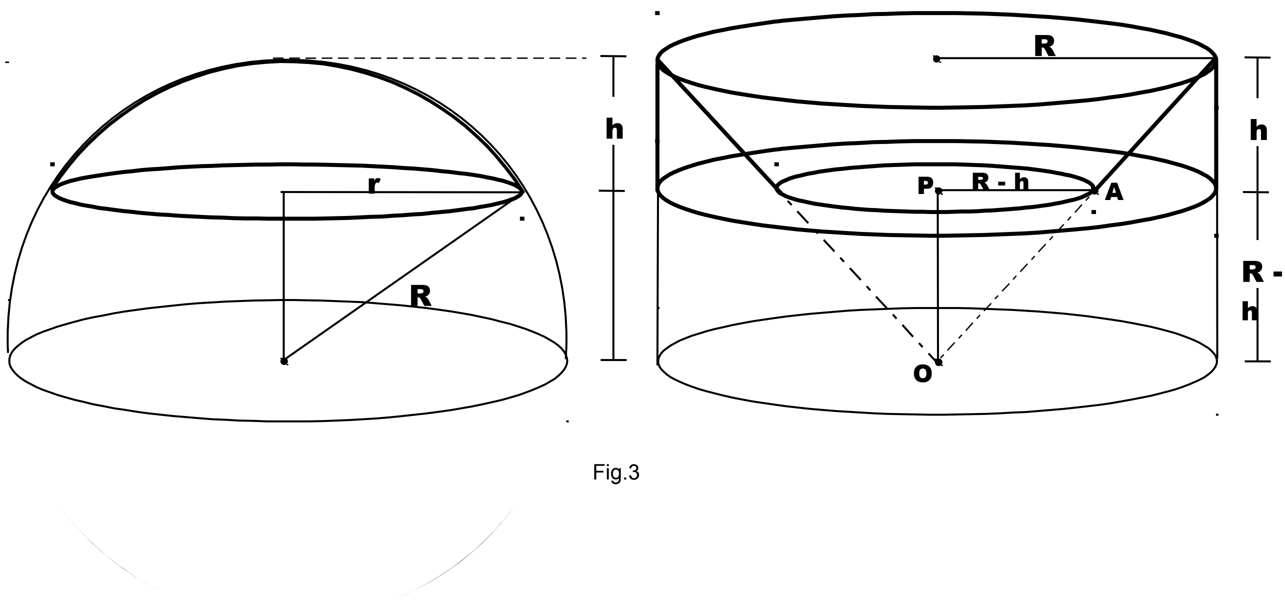


Fig.3

Efetuando os cálculos temos:

$$V_c = \pi.R^2.h - \frac{\pi.h.(R^2 + R.(R-h) + (R-h)^2)}{3}.$$

$$V_c = \frac{3.\pi.R^2.h}{3} - \frac{\pi.h.(R^2 + R^2 - R.h + R^2 - 2R.h + h^2)}{3}.$$

$$V_c = \frac{3.\pi.R^2.h}{3} - \frac{(3\pi.R^2h - 3\pi.R.h^2 + \pi.h^3)}{3}.$$

$$V_c = \frac{(3\pi.R.h^2 - \pi.h^3)}{3}.$$

$$V_c = \pi Rh^2 - \frac{\pi.h^3}{3}.$$

$$V_c = \pi.h^2.\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Observe que, nessa fórmula, precisamos da altura da calota e do raio R da esfera que contém a calota. Se quiséssemos expressar o volume da calota em função da altura ***h*** e do raio da base da calota ***r***, bastaria observar que:

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2$$
$$r^2 = R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2)$$
$$2Rh = r^2 + h^2$$
$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

Substituindo R, na fórmula anterior do volume da calota, temos:

$$V_c = \pi .h^2.\left(\frac{r^2 + h^2}{2h} - \frac{h}{3}\right)$$
$$V_c = \frac{\pi .h^3}{2} - \frac{\pi .h^3}{3} + \frac{\pi .h.r^2}{2}$$
$$V_c = \frac{\pi .h}{6}.(3r^2 + h^2)$$

Ressaltamos que a primeira expressão, além de ser mais simples, pode ser facilmente utilizada em qualquer um dos casos apresentados, pois, descobrir o raio da esfera a partir do raio da calota é uma aplicação simples do Teorema de Pitágoras, sendo, portanto, desnecessária a memorização de duas fórmulas, uma para cada caso.

Conclusão

Utilizar o princípio de Cavalieri como Axioma no Ensino Médio é uma excelente oportunidade de mostrar como idéias aparentemente simples podem ser extremamente poderosas na solução de diversos problemas, inclusive de problemas complicados. Reforçamos e defendemos a importância de sua utilização para complementar a abordagem no estudo de volumes no Ensino Médio.

Esperamos que essa aplicação do Princípio de Cavalieri contribua de alguma forma para a ampliação da utilização dessa ferramenta tão poderosa e muitas vezes tão subutilizada neste nível de ensino.

BIBLIOGRAFIA

[1] – Lima, Elon Lages et all. *A Matemática no Ensino Médio*, Vol. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, 1998.

[2] – Dolce, Osvaldo et all. *Fundamentos da Matemática Elementar*, Vol. 10. São Paulo, Atual Editora, 1996.

[3] – Eves, Howard, *Introdução à História da Matemática,* Unicamp, Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

(*) **Ivail Muniz Junior** é carioca, docente do Departamento de Matemática do Colégio Pedro II , do Colégio Santo Antonio Maria Zaccaria e da Escola Técnica João Luiz do Nascimento (FAETEC/RJ). É Licenciado em Matemática pela UFRJ, com Especialização em Aprendizagem em Matemática pela UERJ e Mestrado em Ensino de Matemática pelo CEFET – RJ. Em sua trajetória profissional já atuou em bancas de concursos públicos de admissão organizados pelo Colégio Pedro II, pela UFRJ, pela BAYER S/A e pela FESP.