ARTIGO

O TEOREMA DE PICK: APLICAÇÕES E IMPLICAÇÕES

Carlos Alberto Paixão (*)

Nas séries iniciais do 2° segmento do Ensino Fundamental são introduzidas as figuras planas elementares tais como triângulo, quadrado, paralelogramo, trapézio e círculo. Mais adiante, nas séries terminais, são introduzidas as fórmulas para os cálculos das áreas de tais figuras. O grau máximo de complicação que se admite neste estágio é o da decomposição de figuras *planas q*ue não são exatamente nenhuma das formas elementares, mas que admitem uma decomposição em tais figuras.

De modo invariante, estas fórmulas dependem de medidas tais como: lados, altura, raios etc. Podemos afirmar que, de modo geral, neste tópico particular, a geometria ensinada na escola básica brasileira não avança além disso. Tal afirmação pode ser facilmente constatada nos textos utilizados neste segmento escolar.

Neste artigo, queremos apresentar um resultado que nos permite calcular, de maneira muito simples, as áreas de regiões poligonais planas contidas num reticulado, cujo modelo físico mais fiel é o geoplano ordenado.

Algumas definições

I) O ponto do plano cujas coordenadas são números inteiros é chamado de *ponto reticulado*.

II) Um *reticulado* é um conjunto de pontos reticulados. Por exemplo, podemos pensar no reticulado **Z × Z**.

III) Um *polígono reticulado* é aquele cujos vértices são pontos reticulados e cujos lados são segmentos de retas unindo vértices consecutivos.

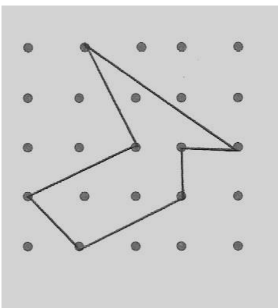


Fig. 1 – Polígono Reticulado

IV) Um *triângulo reticulado primitivo* é aquele que não contém pontos reticulados no seu interior nem pontos na borda, exceto os seus vértices.

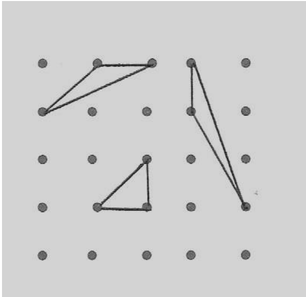


Fig. 2 – Triângulo Reticulado

Para um polígono reticulado P, considere :

i = o número de pontos reticulados internos;

b = o número de pontos reticulados na borda.

Então , com estes termos, segue o surpreendente:

Teorema de Pick

A área A_p de um polígono reticulado simples P é dada pela fórmula

$$A_p = i + \frac{b}{2} - 1 .$$

A demonstração se baseia em dois fatos surpreendentes descobertos por George Pick em 1899.

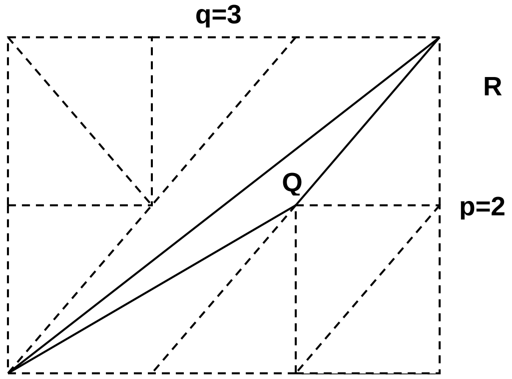
Fato 1 – Existem exatamente 2i + b – 2 triângulos reticulados primitivos em qualquer triangulação primitiva de P.

Prova do fato 1. Considere duas cópias idênticas de uma triangulação primitiva qualquer de P e considere que essas cópias sejam coladas pelas bordas idênticas. Admita que tais cópias sejam feitas de um material elástico que permita uma dilatação uniforme de cada triângulo, porém sem perda de qualquer aresta quando esta construção é inflada. Note que cada cópia desta triangulação contribui com T triângulos. Então, o total de faces (F) nesse poliedro assim construído será F = 2T. Por outro lado, o total de arestas A = 3T , e o número de vértices V = 2i + b . Usando a fórmula poliedral de Euler, obtemos: V – A + F = 2i + b - 3T + 2T = 2 .

Logo, T = 2i + b - 2.

Fato 2 – A área de qualquer triângulo reticulado primitivo sempre vale ½.

Prova do fato 2. Considere um retângulo reticulado qualquer R e seja Δ um triângulo reticulado particular, como na figura abaixo. Admita ainda que R tenha em sua base m unidades de comprimento e n unidades de altura.



Então, temos 4 vértices, 2(m – 1) pontos sobre as bases, 2(n -1) pontos sobre os lados. Portanto, são 2(m + n) pontos na borda, no total. Os pontos interiores formam (m -1) colunas e (n -1) linhas. Existem, portanto, (m – 1).(n – 1) pontos interiores. Então, temos i = (m – 1).(n – 1) e b = 2(m + n) e pelo fato 1, temos

$$T = 2\,(m - 1).(n - 1) + 2(m + n) - 2 = 2m.n.$$

Obtemos, assim, 2mn triângulos primitivos, cada um com área não menor que ½. Por outro lado, a área de R é o produto m.n e, consequentemente, cada triângulo primitivo, inclusive Δ, deve ter área exatamente igual a ½.

Uma outra maneira de se provar o fato 2 é usar um resultado muito interessante sobre as sequências de Farey.

Seja n um inteiro positivo. A seqüência de Farey de ordem n, F_n, é a dos racionais do intervalo $[0,1]$ com denominadores menores ou iguais a n, colocados em ordem crescente. Adotaremos: 0 = 0/1 e 1 = 1/1. A figura abaixo mostra alguns exemplos.

$F_1: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$F_2: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$F_3: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$F_4: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1},$

$F_5: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

$F_6: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$

$F_7: \ \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Os racionais do intervalo $[0,1]$ podem ser representados por pontos reticulados no primeiro quadrante do sistema de coordenadas, abaixo da reta y = x .Se P e Q são dois pontos reticulados distintos de tal forma, que o triângulo OPQ não tem ponto reticulado interior ou na borda, distintos de seus vértices, então, os racionais correspondentes aos pontos P e Q são termos sucessivos na sequência de Farey (de ordem $\leq$ soma dos denominadores).

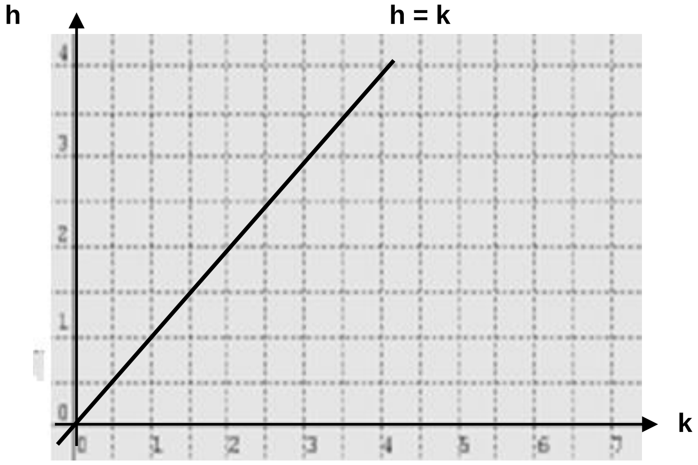


Fig. 3 – Os racionais em [0,1]

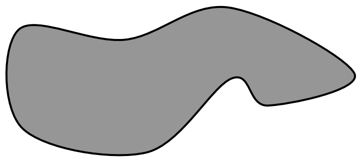
Para a sequência de Farey de ordem n vale o seguinte resultado;

Teorema - Se h/k e h'/ k' são termos sucessivos de F_n, então kh'- hk' = 1 e k + k' > n
Dem: Veja em $[3.]$

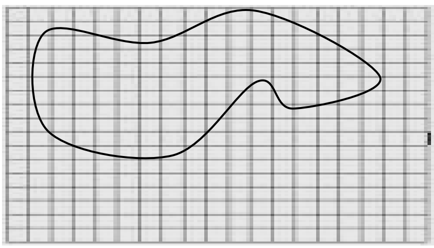
Aplicações

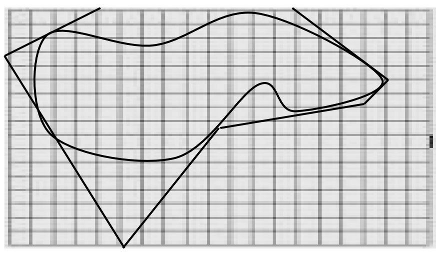
3.1 – Cálculo de Áreas

A fórmula de Pick oferece uma grande variedade de oportunidades para abordarmos estimativas de áreas ou aproximação das mesmas. Por exemplo, dada uma figura plana como na figura abaixo, estimar sua área.



Procedemos do seguinte modo: traçamos sobre a figura, uma malha e em seguida desenhamos um polígono com vértices sobre a malha, englobando a área dada:





Neste procedimento há pelo menos duas ideias que devemos observar**: a primeira** é que, quanto mais fina a malha, melhor será a aproximação; **a segunda ideia** é que a aproximação ou estimativa depende da poligonal escolhida.

Com essa ideia, podemos determinar uma boa aproximação da verdadeira área de uma figura mostrada em mapas geográficos ou numa fotografia, como por exemplo uma área devastada na região amazônica.

3.2 - Triângulos reticulados com único ponto reticulado interior

Vamos denotar a expressão $i + \frac{b}{2} - 1$ por P_k e a chamá-la de *número de Pick*.

Uma pergunta que surge no âmbito da combinatória é a seguinte:

Que combinações dos valores de b e de i podem ocorrer em polígonos reticulados?

Se i = 0, por exemplo, o número de Pick fica $P_k = \frac{b}{2} - 1$, portanto, b não pode assumir valores maior que 2.

Por outro lado, se i = 1, o número de Pick será $P_k = \frac{b}{2}$ e, nesse caso, não ocorre um triângulo com 7 pontos na borda, contendo um único ponto reticulado no seu interior.

Na verdade, vale o seguinte resultado:

"Se um triângulo reticulado possui $P_k = \frac{b}{2}$ então b = 3,4,6,8 ou 9."

Dem. : Veja em [4]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - Andrade, Doherty. *A Fórmula de Pick.* Curitiba: Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, V. 9, 2ª Série, 1988.

[2] - Gaskell, R.W. Klamkin,M.S.;Watson,P. *Triangulations and Pick's Theorem*. Mathematics Magazine, V.49,n.1,p.35-37, Jan.1976.

[3] - Landau, Edmund. *Teoria Elementar dos Números*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2002.

[4] - Weaver, C. *Geoboard Triangles with One Interior Point*. Mathematics Magazine,V.50, n.2. p.92-94,March,1977.

(*) Carlos Alberto Paixão é Mestre em Matemática pelo IM/UFRJ, docente do Departamento de Matemática do Colégio Pedro II e da Faculdade de Formação de Professores da UERJ. Já participou de diversos encontros de Educação Matemática e Matemática Pura.