ARTIGO

COMO SABER SE UM NÚMERO FORMADO APENAS POR ALGARISMOS IGUAIS A 1 É DIVISÍVEL POR 7 ? RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

José Roberto Julianelli (*)

O relato a seguir teve início quando eu precisei resolver a questão de vestibular abaixo:

UFF/2002 - Com o desenvolvimento da tecnologia, novos dispositivos eletrônicos vêm substituindo velhos tabuleiros ou mesa de jogos. Um desses dispositivos conhecido como "dado eletrônico" é um circuito elétrico que, de forma lógica, executa o seguinte procedimento: partindo de um número natural N, transforma-o em um número natural R que corresponde ao resto da divisão de N por sete; a seguir, apresenta no visor o número R como sendo o número sorteado. Ao apertar o botão do "dado eletrônico", uma pessoa gerou um pulso correspondente ao número natural N formado por 2002 algarismos, todos iguais a 1. Assim sendo, o número R que aparecerá no visor é:

A) *0* *D)* *4*

B) *1* *E)* *5*

C) *2*

Como se percebe, o enunciado faz menção a um número composto por 2002 algarismos iguais a 1 e é necessário calcular o resto da divisão desse número por 7.

Eu não me lembrava de um bom critério de divisibilidade por 7 e procurei uma solução alternativa, chegando a algumas conclusões interessantes.

Veja a seguir:

Comecei tentando encontrar uma lei de formação para obtenção desse resto, escrevendo os números que podiam ser formados com 1, 2, 3, etc, algarismos iguais a 1 e o seu respectivo resto, quando dividido por 7, obtendo o seguinte quadro:

NÚMERO	NÚMERO DE ALGARISMOS	PARTE INTEIRA DO QUOCIENTE	RESTO DA DIVISÃO POR 7
1	1	0	1
11	2	1	4
111	3	15	6
1111	4	158	5
11111	5	1587	2
111111	6	15873	0
1111111	7	158730	1
11111111	8	1587301	4
111111111	9	15873015	6
1111111111	10	158730158	5
11111111111	11	1587301587	2
111111111111	12	15873015873	0

Tabela 1

A partir daí, acreditei que os restos das divisões por 7 teriam uma repetição cíclica, o que me permitia "concluir" que se o número formado tivesse uma quantidade de algarismos iguais a 1, que fosse múltipla de 6, isto é, 6 algarismos iguais a 1, 12 algarismos iguais a 1, e assim por diante, esse número seria sempre divisível por 7.

Mas como provar isso?

Levei a questão para discutir com alguns colegas numa reunião de professores de Matemática.

Logo o professor Joffre me disse que conhecia um critério de divisibilidade por 7 e que daria para verificar se o número em questão era ou não divisível por 7.

Eis o critério que o professor Joffre me apresentou:

Vamos verificar se o número 9.695 é divisível por 7

1. Separa-se o último algarismo da direita do número e subtrai-se do número restante, o dobro desse algarismo que foi separado:

$$\begin{array}{l} 969\ \ 5 \\ \ \ 10 \\ \hline 959 \end{array}$$

2. Repete-se o processo anterior para o novo número encontrado (agora 959) , até que se obtenha um número que seja (ou não) múltiplo de 7.

$$\begin{array}{l} 95\ \ 9 \\ 18 \\ \hline 77 \end{array}$$

77 é divisível por 7, logo 9.695 é divisível por 7

Pesquisando um pouco mais na Internet, encontrei outros critérios de divisibilidade por 7, que também são bastante interessantes, porém não respondiam a minha questão inicial: eu ainda queria uma prova daquilo que eu desconfiava em relação ao número formado apenas por algarismos iguais a 1.

Verifiquei ainda que o critério apresentado pelo professor Jofre servia para o número 111111 (formado por 6 algarismos iguais a 1), ou seja,

$$\begin{array}{l} 11111\ \ 1 \\ \underline{\qquad\ 2\qquad} \\ 11109 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1110\ \ 9 \\ \underline{\qquad 18\quad} \\ 1092 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 109\ \ 2 \\ \underline{\qquad 4\quad} \\ 105 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10\ \ 5 \\ \underline{10\qquad} \\ \ \ 0 \end{array}$$

Mas não teria como provar isso de outra maneira?

Pensei um pouco mais e acabei descobrindo o seguinte caminho:

$$111111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1$$

A expressão $1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$ representa a soma de 6 termos de uma Progressão Geométrica de razão 10, e é igual a

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{1(10^6 - 1)}{10 - 1} = \frac{(10^3 + 1)(10^3 - 1)}{9}$$

Observando que o número $10^3 + 1 = 1001$ é múltiplo de 7 ($143 \times 7 = 1001$) e que $10^3 - 1$ é múltiplo de 9 conclui-se que a soma dos termos da PG é um múltiplo de 7.

Consideremos agora um número com 12 algarismos iguais a 1. Teremos:

$$111111111111 = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{11} = \frac{1(10^{12} - 1)}{10 - 1} = \frac{(10^6 + 1)(10^3 - 1)(10^3 + 1)}{9}$$

Novamente aparecem os fatores $10^3 + 1$ e $10^3 - 1$, que nos permitem concluir que o número 111111111111 é divisível por 7.

Para generalizarmos o que foi verificado anteriormente, basta lembrar que:

$111111111111 = 111111000000 + 111111 = 111111.10^{6} + 111111 =$
$= 111111\,(10^{6} + 1)$ e como 111111 é múltiplo de 7, o número 111111111111 também o será.

Para um número com 18 algarismos iguais a 1, também poderíamos escrever:

$111111111111111111 = 111111000000000000 + 111111111111 =$
$= 111111.10^{12} + 111111111111 = 111111.\,10^{12} + 111111000000 + 111111 =$
$= 111111.\,10^{12} + 111111.\,10^{6} + 111111 = 111111\,(10^{12} + 10^{6} + 1)$
que é múltiplo de 7.

Assim, conclui-se que qualquer número formado apenas por algarismos iguais a 1, sendo essa quantidade de algarismos igual a 6k, $k \in \mathbf{N}^{*}$, pode ser escrito sob a forma:

$111111\,(10^{6(k-1)} + 10^{6(k-2)} + \ldots + 1)$, que é múltiplo de 7.

Por fim, observemos ainda que, se o número fosse formado por 9 algarismos iguais a 1, teríamos:

$111111111 = 111111000 + 111 = 111111.\,10^{3} + 111.$

Como a primeira parcela é divisível por 7, conclui-se que o resto da divisão do número 111111111 por 7 é o mesmo que se obtém dividindo-se 111 por 7, ou seja, o resto é igual a 6.

Voltando ao problema original, se o número é formado por 2002 algarismos iguais a 1, poderemos agrupar esses algarismos em 333 conjuntos de 6 algarismos (6 x 333 = 1998), restando ainda 4 algarismos iguais a 1 ao final do número.
Agora é fácil concluir que o número 1111 deixa resto 4 na divisão por 7.

Logo, o número formado por 2002 algarismos iguais a 1 deixa resto 4 quando dividido por 7.

Observação

Na tabela 1, apresentada logo no início deste artigo, temos uma outra curiosidade. Observando a parte inteira de cada quociente obtido, verifica-se uma lei de formação interessante.

Através disso, é possível determinar o quociente da divisão por 7, de um número formado por 24 algarismos iguais a 1, sem efetuar essa divisão.

O resultado é 15.873.015.873.015.873.015.873.

Você pode explicar por quê?

Para encerrar essa breve reflexão, vamos ainda observar que a soma

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \ldots + 111111\ldots 1,$$

sendo a última parcela formada por n algarismos iguais a 1, pode ser calculada do seguinte modo:

$$S = \frac{9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 999\ldots9}{9} =$$

$$S = \frac{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots (10^n - 1)}{9} =$$

$$S = \frac{(10 + 100 + 1000 + \ldots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}{9} =$$

$$S = \frac{\frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1}}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10 \cdot (10^n - 1) - 9n}{81} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

Verificando:

Para n = 1, temos $S = \frac{10^2 - 9.1 - 10}{81} = \frac{81}{81} = 1$

Para n = 2, temos $S = 1 + 11 = \frac{10^3 - 9.2 - 10}{81} = \frac{972}{81} = 12$

Para n = 3, temos $S = 1 + 11 + 111 = \dfrac{10^4 - 9.3 - 10}{81} = \dfrac{9963}{81} = 123$

E assim, sucessivamente.

(*) **<u>José Roberto Julianelli</u>** é Mestre em Educação Matemática pela Universidade Severino Sombra (USS) e docente do Departamento de Matemática do Colégio Pedro II, do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira – CAp/UERJ, da Universidade Estácio de Sá (UNESA) e da Escola Sesc de Ensino Médio/RJ. Em sua trajetória profissional já participou de diversas bancas de elaboração de provas de admissão ao Colégio Naval, CAp/UERJ, CPII e também dos Vestibulares da UNESA, UERJ e UENF.