O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO DE FRAÇÕES

Simone Silva Nunes
Graduada em Licenciatura em Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul
simonesilvanunes144@gmail.com

Dra. Greice da Silva Lorenzzetti Andreis
Licenciada em Matemática, Mestra em Matemática Aplicada, Doutora em Engenharia Química
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul
greice.andreis@caxias.ifrs.edu.br

Resumo:
Nesta pesquisa, buscou-se verificar a que nível o pensamento algébrico é abordado no 6º ano do Ensino Fundamental, com o conteúdo de frações, e propor uma sequência de atividades envolvendo este assunto. Para tanto, fez-se uma análise de livros didáticos que abordam o tema e elaborou-se uma sequência didática para explorar o conteúdo de frações, introduzindo o pensamento algébrico. A proposta foi aplicada com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental da Rede Estadual de Educação do Estado do Rio Grande do Sul, procurando levantar reflexões acerca das características apresentadas pelos alunos em suas produções, indagações e atitudes. Foram aplicados um Pré-teste, uma sequência de atividades envolvendo o pensamento algébrico e um Pós-teste. Ao final, fez-se a análise dos resultados obtidos com tais atividades. Obteve-se como resultado, um aumento de 5% no desempenho dos alunos, comparando seu desempenho no Pré-teste e no Pós-teste. Conclui-se, assim como trazem as literaturas estudadas, que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve iniciar o mais cedo possível, proporcionando ao aluno uma maior facilidade no entendimento de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Frações. Ensino Fundamental. Livro Didático. Matemática.

Abstract :
In this research we tried to verify to what level the algebraic thinking is approached in the 6th year of Elementary School, with the content of fractions, and to propose a sequence of activities involving this topic. For that, an analysis of didactic books that approach the topic was made and a didactic sequence was elaborated to explore the content of fractions introducing the algebraic thinking. The proposal was applied with a 6th grade class from the State Education Network of the State of Rio Grande do Sul, seeking to raise reflections about the characteristics presented by the students in their productions, inquiries and attitudes. We applied a Pre-test, a sequence of activities involving algebraic thinking and a Post-test. At the end, the results obtained with these activities were analyzed. The result was a 5% increase in student performance, comparing their performance in the Pretest and Posttest. It is concluded, as well as the studied literature, that the development of algebraic thinking should start as soon as possible, giving the student an easier understanding of mathematical concepts.

Keywords: Algebraic Thinking. Fraction. Elementary School. Didactic Book. Mathematics.

Introdução

Nesta pesquisa, entendemos que o pensamento algébrico está relacionado com a capacidade de simbolização e com o estabelecimento de relações. A introdução do pensar algebricamente, desde o Ensino Fundamental, propicia aos estudantes um melhor entendimento matemático pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997, p. 55), é neste momento que “o pensamento ganha maior flexibilidade, o que lhes possibilita perceber transformações” e não apenas reconhecer a Álgebra como uma ferramenta para a resolução de equações, como entendia-se antigamente. Em concordância, Lins (2012, p. 102) aponta que “talvez a Matemática que tínhamos na escola só existisse dentro da escola”. Além disso, o pensamento algébrico proporciona ao indivíduo ferramentas para entender o mundo, possibilitando a simbolização, a generalização e o estabelecimento de relações.

Hoje, o aprendizado da Álgebra é visto como um desafio, tanto para o aluno que tem contato com algo novo, que exige mais formalidade, quanto para o professor que precisa despertar no aluno o interesse por este aprendizado. Conforme os PCNs (BRASIL, 1997, p. 39),

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação.

A ideia desta pesquisa surgiu pelo fato de alguns cursos de Licenciatura em Matemática apresentarem em suas matrizes curriculares, logo nos primeiros semestres, componentes curriculares focados em um desenvolvimento algébrico mais aprofundado, visando a melhor concretização dos conceitos vistos nestes cursos. Se na graduação esta construção parece ser importante, pensamos que também seja relevante trabalhar com esta construção desde o Ensino Fundamental, criando alicerces bem estruturados desde cedo, possibilitando uma melhor aprendizagem.

Esta pesquisa traz um estudo sobre a utilização do pensamento algébrico para o ensino de frações, tomando como elemento de pesquisa uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental da Rede Estadual de Educação do Estado do Rio Grande do Sul, no município de Caxias do Sul.

O Pensamento Algébrico

A Matemática é uma ciência composta por elementos, definições e teses. De acordo com Ripoll *et al*. (2011), a produção de resultados matemáticos requer um certo rigor e se apresenta em duas etapas, a heurística e a demonstração. Na heurística, identificam-se analogias, simulações, experiência e intuição, assim como enunciam-se conjecturas. As conjecturas são afirmações de resultados matemáticos, as quais apresentam evidências quanto a sua veracidade, no entanto, não tem-se a certeza, apenas indícios. Após formulada uma conjectura, passa-se à sua demonstração. A demonstração é a forma que possibilita qualquer pessoa certificar-se de modo inquestionável quanto à sua veracidade ou à sua falsidade. Nem sempre os resultados produzidos em Matemática têm suas demonstrações em um mesmo espaço de tempo. A Conjectura de Fermat, por exemplo, teve sua demonstração 356 anos depois de seu estabelecimento (RIPOLL *et al.*, 2011).

Em relação à apresentação da Matemática a estudantes, deve-se levar em consideração o propósito desta apresentação. A Matemática colocada na forma axiomática, que consiste em uma estruturação em axiomas, definições, lemas, teoremas e corolários, é destinada a estudantes de cursos de graduação e pós-graduação. Porém, a Matemática deve ser apresentada de uma forma mais próxima aos estudantes do Ensino Fundamental ou Médio, sem perder sua formalidade. Conforme Lima *et al.* (2012), a forma axiomática não é a forma mais ideal nesta etapa.

Embora identifique-se a importância do rigor matemático, Ripoll *et al.* (2011, p. 20) afirmam que os vícios trazidos da Educação Básica “[...] fazem com que haja uma forte tendência de os alunos de graduação não obedecerem a esse padrão de rigor”. Nesse sentido, Lima *et al*. (2012) julgam que a Matemática para o Ensino Médio deve ser organizada de uma forma equilibrada, explorando apenas os casos mais relevantes, os quais não são tão evidentes para o aluno. Lima *et al.* (2012, p. 32) consideram ainda que “as demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas”. Neste sentido, acredita-se que deva existir um equilíbrio entre o rigor matemático e possibilidade de entendimento dos estudantes.

No âmbito do Ensino Fundamental, o pensamento algébrico é abordado por alguns autores. Calvalho (2010) apresenta uma pesquisa que tem como objetivo desenvolver a argumentação matemática, bem como o pensamento generalizado para posterior introdução de expressões algébricas que, em sua opinião, estão ausentes no presente ensino de Matemática. O autor realizou atividades que foram aplicadas em uma turma de 8º ano durante um trimestre. Nas atividades, ele foi gradativamente introduzindo o pensamento matemático, iniciando com a soma de números naturais, após foram introduzidas generalizações e, por fim, as expressões algébricas. Obteve como conclusão o retorno positivo de vários alunos, inclusive dos que não participavam de forma satisfatória das aulas. Percebendo a carência em sala de aula e, em seu ponto de vista, a errônea forma de abordagem dos livros didáticos, elaborou em sua dissertação um capítulo voltado para o ensino de Matemática com o conteúdo de polinômios, direcionado a professores de Matemática da Educação Básica. Carvalho (2010) conclui que se faz necessária a introdução do pensamento algébrico desde os anos finais do Ensino Fundamental.

Silva (2012) defende que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve se dar desde o início do Ensino Fundamental. Ainda, afirma que a linguagem algébrica deve ser abordada por meio de estratégias que enfatizem o pensamento algébrico. A autora desenvolveu tarefas baseadas na Early Algebra, que consiste em pesquisas relacionadas à educação algébrica inicial, e as aplicou em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. O objetivo foi analisar a forma como as crianças apresentam seu raciocínio algébrico, tendo em vista que é o primeiro contato com ele. A autora afirma que as crianças demonstraram ter condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não tendo habilidades com uma linguagem simbólica algébrica, uma vez que as tarefas propostas e o ambiente de estudo permitiram que elas construíssem sua própria linguagem para justificar suas ideias.

Veloso (2012) realizou uma pesquisa referente ao pensamento e à linguagem algébrica, na qual aplicou atividades para tal desenvolvimento em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Uma das atividades aplicadas consistia na construção de quadrados com palitos de fósforo, com o objetivo de trabalhar as noções de padrão e sequência. A pesquisadora investigou as formas de raciocínio dos estudantes por meio da realização de tais tarefas e por meio de debates entre os estudantes. Relata ter observado por parte dos alunos o estabelecimento de relações, a produção de significados e a realização de generalizações algébricas. Como resultado, Veloso (2012, p. 207) ainda afirma “que o processo de desenvolvimento algébrico em alunos inexperientes no estudo da Álgebra e em anos anteriores ao proposto pelos currículos vigentes é lento, mas, possível”. Na mesma linha de pensamento, Canavarro (2007, p. 31) entende que o pensamento algébrico “pode ser manifestado em alunos que ainda não tiveram um contato com a linguagem algébrica”, e Lins e Gimenez (1997) *apud* Freire (2007, p. 24) acreditam que “conceitos algébricos devem ser introduzidos e estimulados já nas séries iniciais do ensino fundamental”.

Abordagem de Frações em Livros Didáticos

O livro didático é uma das formas convencionais mais utilizadas pelos professores para a preparação de aulas. Sua análise possibilita observar como os autores abordam cada conteúdo, quais são as ênfases dadas e quais as metodologias adotadas. Nesta pesquisa, analisaram-se livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, incluindo edições de 2000, 2006, 2011 e 2015 de diferentes autores. Esta escolha foi feita com a intenção de selecionar livros de épocas distintas, a fim de analisar a ênfase dada para o pensamento algébrico na abordagem do conteúdo de frações, além de servir para a elaboração da sequência didática proposta. Faz-se aqui um breve relato da análise. Mais detalhes podem ser consultados em Nunes (2018).

Os livros analisados apresentam uma boa quantidade de exercícios, e observou-se uma evolução em sua caracterização: em Bigode (2000), os exercícios em sua maioria são de fixação/repetição; em Bonjorno *et al*. (2006), observou-se um equilíbrio entre exercícios de fixação/repetição e exercícios contextualizados; já em Bianchini (2011) identificou-se a predominância dos exercícios contextualizados, mesma característica observada em Souza e Pataro (2015). Ademais, nos exemplares dos anos 2000 e 2006, os autores abordam a utilização da tecnologia por meio da calculadora.

Os livros de Bonjorno *et al*. (2006) e Bianchini (2011) apresentam questões de concursos, vestibulares e programas avaliativos nacionais, o que não ocorre em Bigode (2000). Todos os autores utilizaram uma linguagem acessível, cores diferentes e imagens ilustrativas, tornando os livros didáticos atrativos. Todos os livros apresentam, de formas diferentes, desafios, estimulando o raciocínio dos estudantes. No capítulo de frações dos livros analisados, o conceito de fração na forma algébrica é apresentado apenas por Bianchini (2011), conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Definição generalizada para número racional.

Todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números naturais, com $b \neq 0$, é um **número racional**.

Fonte: Bianchini (2011, p. 113).

Em linhas gerais, todos os livros analisados apresentam, em algum momento, exercícios envolvendo o pensamento algébrico. Alguns desses exercícios foram utilizados nesta pesquisa e são descritos na seção de resultados.

Metodologia

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, pois busca a avaliação da parte subjetiva do problema e aponta dados que não podem ser ponderados numericamente. Segundo Gaskell (2012, p. 68), a "finalidade real da pesquisa qualitativa não é contar opiniões ou pessoas, mas ao contrário, explorar o espectro de opiniões, as diferentes representações sobre o assunto em questão".

Parte da pesquisa foi realizada por meio de entrevista de investigação, com a aplicação das atividades do Pré-teste e do Pós-teste, a fim de coletar dados para a análise. De acordo com Rosa e Arnoldi (2008, p. 35), a entrevista de investigação é "conhecida como técnica de obtenção de informação relevante para todos os objetivos de um estudo, podendo adotar formatos e estilos variados". Esta entrevista de investigação foi realizada por meio dos questionários Pré-teste e Pós-teste que, conforme as orientações disponibilizadas pela I-TECH (2008, p. 1),

> [...] são utilizados para medir o conhecimento adquirido pelos participantes numa formação. O pré-teste é um conjunto de perguntas feitas aos participantes antes do início da formação, com a finalidade de determinar o seu nível de conhecimento sobre o conteúdo que será ensinado. Ao final da formação, os participantes devem responder a um pós-teste com as mesmas perguntas feitas anteriormente, ou perguntas com o mesmo nível de dificuldade. Através da comparação das notas do pré-teste com as notas do pós-teste, será possível descobrir se a formação foi bem-sucedida em aumentar o conhecimento do participante sobre o conteúdo da formação.

Com base nos dados coletados foi possível identificar os problemas e os progressos apresentados pelos alunos na realização das atividades propostas.

A pesquisa foi aplicada com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, de uma Escola Estadual do Estado do Rio Grande do Sul, situada na cidade de Caxias do Sul. A turma, composta por 29 alunos, possuía 16 meninas e 13 meninos, com faixa etária de 11 a 12 anos, e 2 alunos com 14 anos.

Procedimentos Metodológicos

Os encontros foram realizados nos períodos regulares das aulas de Matemática. A turma tinha cinco períodos semanais de 50 minutos, divididos em 3 dias da semana. A aplicação das atividades foi intercalada com as aulas da professora da turma. Foi realizada uma observação da turma e, nos encontros seguintes, foram desenvolvidas as atividades propostas, incluindo a aplicação de um Questionário, a aplicação do Pré-teste, o desenvolvimento de atividades envolvendo o pensamento algébrico e a aplicação do Pós-teste. Por fim, foi avaliado o progresso apresentado pelos alunos.

No primeiro encontro (E1), fez-se uma discussão para que os alunos percebessem a aplicação dos números fracionários no cotidiano. Em seguinda, aplicou-se o Pré-teste para analisar o nível de conhecimento matemático sobre soma de frações e frações equivalentes. Ainda, foram introduzidos alguns símbolos nos exercícios.

No segundo encontro (E2), foram aplicadas atividades para o estabelecimento de relações entre figuras geométricas e frações, identificação das proporções existentes nas peças do Tangram, representação das frações e construção de figuras geométricas com as peças do Tangram. Atividades para a identificação das frações equivalentes, utilização da representação algébrica e identificação de frações por meio de material concreto foram trabalhadas no terceiro encontro (E3). No quarto encontro (E4), foram aplicadas atividades para identificar, em figuras geométricas, as frações e sua forma mista, e, ainda, a resolução de expressões com a representação algébrica. No quinto encontro (E5), foi realizada a análise da proporção das frações de forma algébrica e geométrica, a interpretação gráfica e a resolução numérica de expressões, bem como o desenvolvimento das operações de multiplicação e divisão com frações por meio da forma numérica e algébrica.

No sexto encontro (E6), foi aplicado o Pós-teste. Esperava-se que os alunos apresentassem domínio referente aos cálculos envolvendo frações equivalentes e operações com frações, analisassem figuras geométricas e resolvessem as expressões numéricas associadas a estas figuras, e apresentassem familiaridade com a representação algébrica.

Resultados e discussão

Para a descrição dos resultados, os estudantes que participaram da pesquisa estão aqui identificados pelas letras do alfabeto, de *A* a *Z*, incluindo-se também *AA*, *BB* e *CC*. A abordagem com a turma é apresentada em 3 fases, descritas na sequência.

Fase 1 – Aplicação do Questionário e do Pré-Teste

As atividades com a turma iniciaram com uma apresentação e uma breve descrição do trabalho que seria desenvolvido com eles. Os estudantes demonstraram-se animados com a proposta. Após o primeiro contato, foi aplicado um Questionário com a finalidade de levantar dados para posterior análise.

Para a pergunta “Que atividades das aulas de Matemática você acha mais fáceis?”, 55% da turma considerou o conteúdo de frações fácil, 35% apontou ter facilidade em outros conteúdos e 10% não opinou. Além disso, para a pergunta “Que atividades das aulas de Matemática você acha mais difíceis?”, 36% da turma considerou o conteúdo de frações difícil, 28% apontou outros conteúdos como sendo difíceis e 36% não opinou ou não considerou nenhum conteúdo difícil.

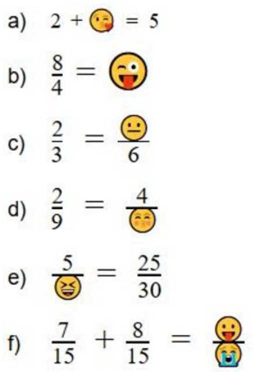
Perguntou-se ainda: “Você entende as ordens dos exercícios de Matemática apenas lendo, ou precisa que a professora explique o que deve ser feito?”. Dos respondentes, 43% relatou entender apenas lendo, 39% informou que depende da ordem do exercício e 18% relatou a necessidade de que a professora explique o que deve ser feito em cada exercício.

Após a aplicação do Questionário, fez-se uma conversa sobre a utilização das frações em nosso cotidiano. Alguns dos reconhecimentos dos alunos foram os seguintes: receita de bolo, divisão de uma barra de chocolate, divisão de uma pizza, mistura para cimento, mistura para rejunte, colocação de azulejos e jogos. Foram comentados mais alguns casos em que pode-se utilizar frações, como por exemplo: a quarta parte da turma quis comer o lanche oferecido pela escola; gastei três quartos do combustível na viagem; gastei um terço da quantia que recebi; já percorri um quinto da distância pretendida. Os alunos interagiram satisfatoriamente, contribuindo com muitos exemplos.

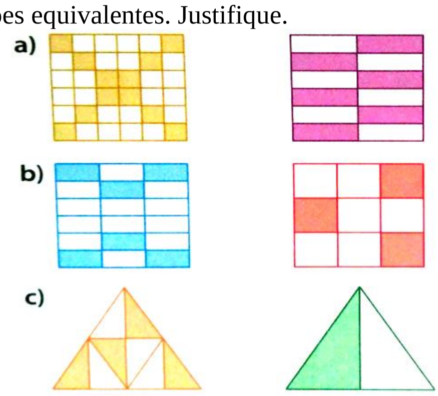
Na sequência, os alunos receberam o Pré-teste (Figura 2). Responderam de forma individual, sem consulta, possibilitando verificar o que cada um sabia fazer naquele momento. Depois de as resoluções serem registradas por meio de fotografias, o Pré-teste foi corrigido com os estudantes.

Figura 2 – Pré-teste.

1) Em cada item, copie e substitua os emojis pelo número adequado:



2) Verifique se os pares de figuras representam frações equivalentes. Justifique.



Fonte: 1) Os autores (2018), 2) Adaptado de Gay (2014, p. 154).

Durante a correção, os alunos manifestaram se tinham acertado ou não cada questão. Gostaram dos *emojis* no lugar dos números pois, segundo eles, era diferente. Cada comentário apresentado pelos alunos foi valorizado, sempre instigando a falarem mais. Por exemplo, na atividade 1b), 9 alunos responderam 4/2 e 5 alunos responderam 2. Foi explicado que ambas as formas estavam corretas, uma vez que 2 também é equivalente a 8/4. Na atividade 1f), 11 alunos responderam 15/15 e 2 alunos responderam 1. Também foi colocado que ambas respostas estavam corretas. Na correção da atividade 2), aproximadamente 50% da turma participou ativamente. Informaram que contaram o mesmo total de partes para cada par de figuras e, após, contaram quantas dessas partes estavam pintadas. Na maioria das justificativas, identificou-se que o raciocínio utilizado envolveu frações equivalentes.

Fase 2 – Sequência de Atividades envolvendo o Pensamento Algébrico

Os objetivos do encontro E2 foram estabelecer relações entre figuras geométricas e frações, identificar as proporções existentes nas peças do Tangram, representar as frações adequadamente e construir figuras geométricas.

Apresentou-se o Tangram, sua origem, bem como algumas lendas sobre ele. Os alunos desenharam em uma folha branca um quadrado de lado 20 cm, o qual serviria de base para a atividade. Um aluno perguntou a medida dos outros lados; neste momento, questionou-se sobre quantos lados tem um quadrado e se os lados podem ser diferentes. Ao levantar esses questionamentos, muitos alunos manifestaram suas opiniões e foram instigados a pensar sobre suas respostas. Por fim, concluiu-se que um quadrado tem quatro lados congruentes e quatro ângulos retos. Foi entregue um Tangram em EVA para cada aluno e solicitou-se que os alunos preenchessem o quadrado desenhado com todas as peças do Tangram. Alguns alunos relataram que seria impossível colocar todas as peças no quadrado. Os alunos tentaram montar o Tangram de todas as formas, até que a maioria da turma conseguiu realizar a montagem. Aproximadamente 30% da turma precisou de ajuda de algum colega para finalizar a primeira parte da tarefa.

Comentou-se com os alunos que as peças do Tangram são todas proporcionais entre si. Um desenho foi feito no quadro para facilitar as explicações geométricas. As seguintes perguntas foram lançadas para a turma (em material impresso):

a) Qual a fração do Tangram que forma o triângulo grande (TG)?
b) Qual a fração do Tangram que forma o triângulo médio (TM)?
c) Qual a fração do Tangram que forma o triângulo pequeno (TP)?
d) Qual a fração do Tangram que forma o quadrado (Q)?
e) Qual a fração do Tangram que forma o paralelogramo (P)?
f) Utilizando todas as peças do Tangram, crie figuras geométricas. Por exemplo: pato, gato, coelho, etc.

A turma debateu sobre as possibilidades de cada caso, contando quantas vezes cada peça cabia dentro da outra. As respostas incorretas foram corrigidas pelos próprios alunos. Concluíram, então, que a fração correspondente ao TG seria 1/4, ao TM, 1/8, e ao TP, 1/16.

Para o quadrado, 50% da turma disse que o Q cabia 9 vezes no Tangram. Solicitou-se aos alunos que mostrassem como chegaram nessa resposta e um aluno disse que foi colocando um Q ao lado do outro. No entanto, indagou-se a este aluno sobre o pedacinho que sobrou para fora do quadrado grande, e ele não soube explicar como fazer. Outro aluno disse que como sobrou um pedaço do lado, poderia dizer que cabem 2,5 Q. Como as peças do Tangram são todas proporcionais, perguntou-se aos alunos se não tinha nenhuma peça que cabia dentro dele, então um aluno disse que o TP cabia duas vezes, então perguntou-se qual era a fração e ele respondeu: “A mesma do TM, pois cabe dois TPs. Portanto, a fração do Q é 1/8”.

Na discussão sobre o paralelogramo, surgiram diversas respostas. Um aluno tomou o TP para preencher os lados do P, a fim de transformá-lo em um retângulo.

Neste momento, questionou-se a esse aluno se ele tinha como representar o P com outras peças do Tangram, mantendo a mesma área que ele possui. Outro aluno disse que sim, o TP cabe duas vezes no P. Perguntou-se aos alunos qual é a fração do P. Todos responderam 1/8. Solicitou-se que observassem as peças TM, Q e P, e relatassem se elas possuíam algo em comum. Aproximadamente 30% da turma respondeu que elas representavam a mesma fração. Mostrou-se para eles que seus formatos são diferentes, no entanto, as 3 figuras ocupam o mesmo espaço (área). Todos ficaram admirados e, então, falou-se aos alunos que o Tangram é mágico, devido à proporcionalidade entre todas as peças. Dessa forma, concluiu-se a construção das frações do Tangram, introduzindo o algebrismo por meio das representações com letras às áreas ocupadas por cada peça.

Após a conclusão da atividade, os alunos construíram diferentes figuras geométricas com as peças do Tangram, como barcos, casas, ETs, cachorros, entre outros.

Os objetivos do encontro E3 foram identificar as frações equivalentes, utilizar a representação algébrica e identificar frações por meio de material concreto. Após receberem as atividades, os alunos iniciaram sua realização e logo começaram as discussões sobre as respostas. Neste momento, ao circular pela sala, foi possível observar as estratégias de resolução dos alunos, bem como instigá-los a pensar sobre suas respostas. Três alunos se manifestaram com relação à Atividade 1 (Figura 3); explicaram que dividiram o painel de Paulo em triângulos pequenos, então, podiam comparar os dois painéis, pois ficaram com o mesmo número de triângulos. Após, mais 5 alunos chegaram a esta mesma conclusão.

Figura 3 – Atividade envolvendo o conceito de frações equivalentes.

1) Paulo pintou de azul $\frac{3}{8}$ de um painel, e Carla pintou de laranja $\frac{5}{16}$ de outro painel igual ao de Paulo. Quem pintou mais?

Fonte: Adaptado de Bianchini (2011, p. 134).

Na Atividade 2 (Figura 4), apresentaram naturalidade ao se deparar com variáveis nas frações. Entenderam rapidamente que deveriam encontrar o valor que elas representavam e que se tratavam de frações equivalentes. A maioria dos alunos apresentou dificuldades para achar os valores das variáveis C, D, E e F. Um aluno explicou com simplicidade como encontrou os valores de C e D: “Encontrando o multiplicador de 9, encontra o valor de C e encontrando o divisor de 39, encontra o D”.

Figura 4 – Atividade envolvendo a representação algébrica.

2) Nas fichas a seguir, cada letra representa um número e as frações são equivalentes. Determine o número correspondente a cada letra.

$\frac{A}{5} = \frac{16}{20}$ $\frac{6}{B} = \frac{3}{7}$

$\frac{81}{C} = \frac{9}{13} = \frac{D}{39}$ $\frac{6}{11} = \frac{48}{E} = \frac{F}{33}$

Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2015, p. 136).

Ao realizar a Atividade 3, os alunos puderam manusear um dado gigante e responderam as perguntas:

a) Quantas faces tem um dado?
b) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair a face 4?
c) Qual é a probabilidade de sair uma face com número par de pontos?
d) Qual é a probabilidade de sair uma face com número de pontos maior do que 1?

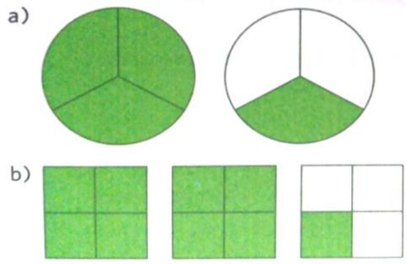
Dois alunos fizeram a atividade juntos e logo concluíram. Acertaram todas as alternativas. Com relação ao item c), explicaram: “Porque o dado tem seis números e a metade deles é par, então a metade de 6 é 3”. Outros alunos precisaram de auxílio para pensar sobre as possibilidades. Sobre o item d), um aluno argumentou: “Porque só tem um número 1, não tem nenhum número menor que ele; tirei ele e deu 5”. A maioria da turma demonstrou muito interesse nessas discussões.

Os objetivos de aprendizagem do encontro E4 foram identificar, em figuras geométricas, as frações e sua forma mista e resolver expressões com representação algébrica. Ao tentar realizar a Atividade 1 (Figura 5), os alunos disseram não lembrar como representar as figuras na forma mista. Então, o conceito foi explicado e exemplificado. Logo relembraram e começaram a fazer a tarefa.

Ao iniciarem a Atividade 2 (Figura 6), aproximadamente 70% da turma demonstrou desinteresse, então, solicitou-se a atenção de todos e abriu-se um momento para reflexões a fim de entender os motivos de estarem dispersos. Na aula anterior, produziram aviões na disciplina de Artes e estavam eufóricos com isso, o que contribuiu para a dispersão e falta de interesse na aula de Matemática. Dos 27 alunos presentes, 19 relataram que as questões estavam muito difíceis por envolver as expressões com “letras”. Foi argumentado com eles que tal atividade já havia sido feita ainda no encontro E1, com os exercícios que eles adoraram com os *emojis*, e que agora haviam sido inseridas letras no lugar dos *emojis*. Com relação à atividade do Tangran, acharam super interessante e, dessa forma, prosseguiram com sua resolução.

Figura 5 – Atividade envolvendo a representação algébrica.

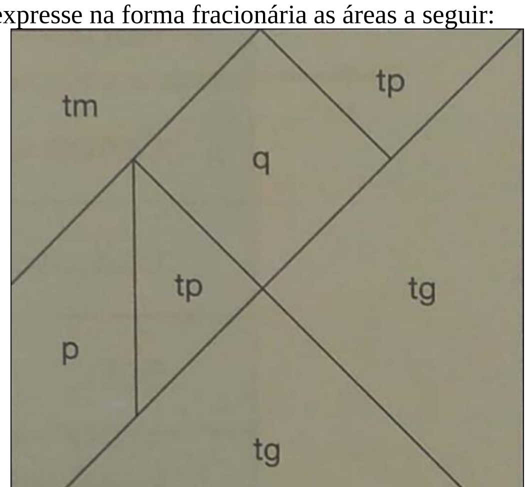
1) Represente, na forma de fração e com números na forma mista, a parte pintada nas figuras de cada item.



Fonte: Adaptado de Chavante (2016, p. 162).

Figura 6 – Atividade envolvendo expressões algébricas.

2) Considere o quadrado formado com as 7 peças do Tangram. Admitindo que a área deste quadrado é 1, expresse na forma fracionária as áreas a seguir:



Legenda:
q: área do quadrado
p: área do paralelogramo
tp: área do triângulo pequeno
tm: área do triângulo médio
tg: área do triângulo grande

a) tp
b) Tm
c) Tg
d) tp + q
e) p + q
f) 2 . tg + tm + 2. tp
g) tm + q + p + tp + tp
h) 2 . tg - tp
i) 2 . tg - tm
j) 2 . tg - (q + tp)

Fonte: Adaptado de Bigode (2000, p. 77).

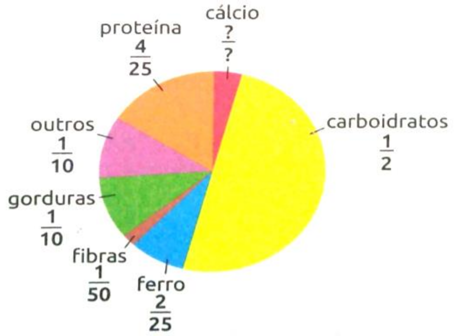
Fez-se então a resolução da atividade 2a) até a 2d). A atividade feita com o Tangram foi relembrada e recapitulou-se as frações que representam cada uma de suas peças. Após, foi solicitado que fizessem as demais expressões. Cerca de 60% dos estudantes acertaram os itens que continham apenas soma; 40% acertaram os itens que continham soma e multiplicação, 25% acertaram os itens que envolviam subtração e 15% acertaram os itens que continham subtração e multiplicação simultaneamente. Aproximadamente 50% da turma apresentou muita dificuldade para a realização da tarefa. Acredita-se que a atividade tenha ficado com o grau de dificuldade muito elevado para o momento.

No encontro E5, os objetivos versaram sobre interpretar gráficos de pizza e resolver expressões numericamente, analisar a proporção das frações numericamente e geometricamente e desenvolver as operações de multiplicação e divisão com frações por meio da forma numérica e algébrica.

O gráfico da Atividade 1 (Figura 7) foi reproduzido no quadro e os alunos discutiram sobre sua resolução. Argumentaram que alguns itens poderiam ser feitos apenas olhando para o gráfico e que outros necessitavam de contas. Com a correção, observou-se que todos os alunos acertaram o item “a) Qual nutriente corresponde à metade do total ingerido por Luana?”, aproximadamente 65% dos estudantes acertaram o item “b) A quantidade de proteína consumida foi maior ou menor que a quantidade de gorduras? Justifique.”, 40% acertaram os 2 primeiros tópicos do item “c) Que fração irredutível representa a quantidade: – de fibras e gorduras juntas? – de cálcio?” e aproximadamente 7% acertaram o terceiro tópico deste último item “– de gorduras a mais que as fibras?”. Já o item “d) A quantidade de proteína que Luana ingeriu é maior, menor ou igual à quantidade de fibras, ferro e cálcio juntos? Qual é a diferença?” teve apenas 17% de acertos.

Figura 7 – Atividade envolvendo a interpretação gráfica.

Fração dos nutrientes ingeridos por Luana em um dia.



Fonte: Adaptado de Chavante (2016, p. 171).

A segunda atividade (Figura 8) foi resolvida rapidamente. Aproximadamente 60% dos estudantes acertaram o número divisor e o número multiplicador; cerca de

40% acertaram o denominador da terceira fração, apontando dificuldade para efetuar a multiplicação de números com dois algarismos. Ao iniciar a correção do item b), foi falado que seria o momento de desvendar um grande mistério. Montou-se o esquema no quadro mostrando que, partindo da fração do meio para chegar na primeira, está "sumindo" alguma coisa. Os alunos disseram que era a letra B, e então mostrou-se a eles que poderiam simplificar, assim como eles fazem nas frações numéricas. E, partindo da segunda fração para chegar na terceira, tinha que fazer uma multiplicação, neste caso, como apareceu a letra C no numerador, multiplica-se AB por C, e o denominador B também se multiplica por C, ficando BC. Foi perguntado aos alunos se era possível fazer mais alguma coisa. Um aluno respondeu que era possível simplificar novamente, logo, o resultado ficaria A. Aproximadamente 25% dos estudantes acertaram esta atividade, no entanto, não fizeram a simplificação no final.

Figura 8 – Atividade envolvendo operações com frações.

2) Copie os esquemas substituindo cada ■ da forma adequada, considerando a operação informada.

a) b) Agora, considerando A, B inteiros e B diferente de zero.

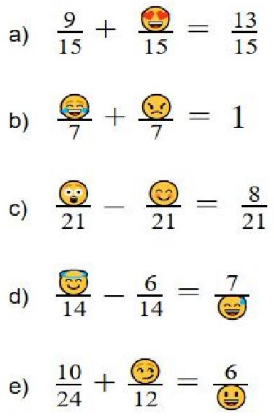
Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2015, p. 136).

Fase 4 – Aplicação do Pós-teste

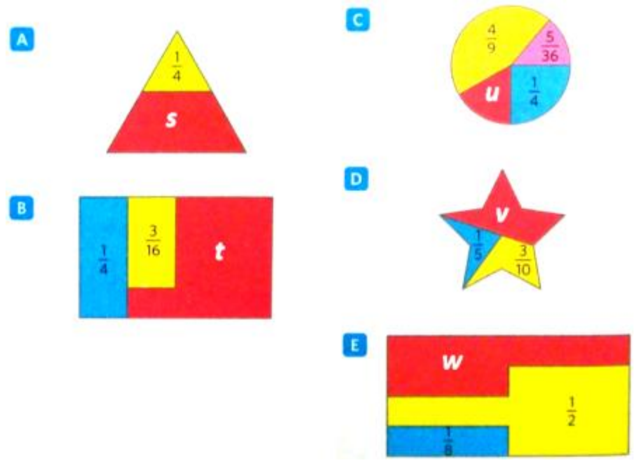
No último encontro, E6, os alunos receberam o Pós-teste (Figura 9). Como no Pré-teste, eles deveriam responder as questões individualmente, sem consulta, a fim de que fosse possível verificar a evolução de cada um após os encontros realizados. Depois de as resoluções da turma serem registradas por meio de fotografias, o Pós-teste foi corrigido com a turma.

Figura 9 – Pós-teste.

1) Em cada item, copie e substitua os *emojis* pelo(s) número(s) adequado(s):



2) Considerando cada figura como um inteiro, que fração corresponde a parte representada por ***s***, ***t***, ***u***, ***v*** e ***w***?



Fonte: Adaptado de Chavante (2016, p. 170).

Ao realizar a correção da atividade 1, os alunos interagiram bastante e informaram os valores que atribuíram para cada *emoji*. Os alunos perceberam e comentaram que, em algumas alternativas, existia a possibilidade de mais de uma resposta. Aproximadamente 95% da turma apresentou dificuldade para resolver o item e). Na correção da atividade 2, aproximadamente 45% da turma resolveu as questões geometricamente. Confirmou-se que poderiam fazer dessa forma, no entanto, neste caso, deveriam realizar os cálculos a fim de verificar se as respostas estavam corretas. Porém, alguns alunos não realizaram os cálculos e cometeram equívocos. Por exemplo, no item c) eles encontraram u = 5/36, no entanto, a resposta correta seria u = 6/36; uma diferença pequena que, geometricamente, os alunos não perceberam.

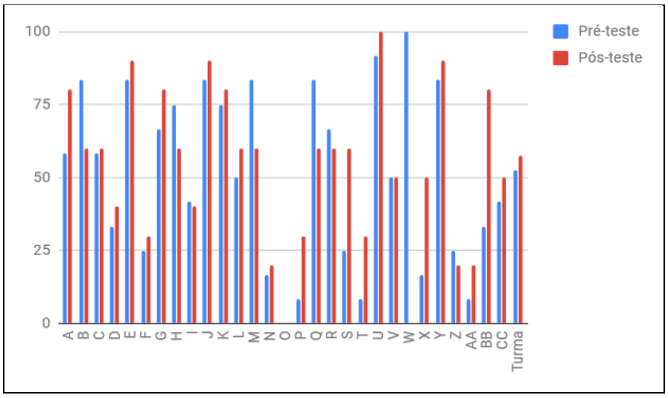
Esperava-se que em algum momento do Pós-teste, os alunos utilizassem a representação algébrica com naturalidade, entretanto, isso não aconteceu. Durante as explicações para a execução da atividade, bem como, durante a correção, referiu-se sempre à representação algébrica, ressaltando a incógnita (letra) correspondente e seus respectivos valores, porém, esta representação não apareceu em nenhum momento da tarefa final.

Ao fazer o comparativo entre o Pré e o Pós-teste, pode-se observar que a turma obteve, embora pequena, uma certa evolução. Pensa-se que alguns fatores contribuíram para que este resultado não fosse maior. Durante a execução do Pós-teste, os alunos tentaram resolver a atividade 2 apenas geometricamente, o que os levou a obter resultados próximos dos corretos, mas ainda assim equivocados.

Comparação entre os Resultados do Pré-teste e do Pós-teste

Na Figura 10, apresenta-se o percentual de acertos de cada aluno, bem como da turma, no Pré-teste e no Pós-teste.

Figura 10 – Resultados dos alunos no Pré-teste e no Pós-teste.

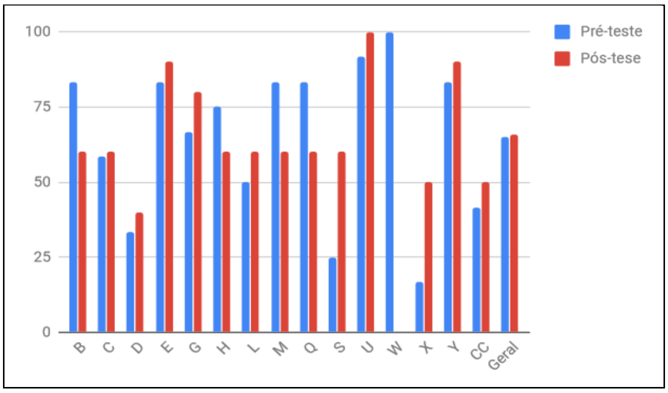


Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Considerando os resultados apresentados na Figura 10, pode-se observar que 63% dos alunos obtiveram uma melhora em seu desempenho, 22% dos alunos apresentaram um desempenho inferior e 15% mantiveram o mesmo desempenho nos 2 testes. Analisando a turma com um todo, observa-se um aumento de aproximadamente 5% nos resultados, passando de uma média geral de 52,68 pontos para 57,41 pontos.

Relacionando com o Questionário aplicado, observa-se que os alunos que consideraram o conteúdo de frações fácil, apresentaram um bom desempenho na execução das atividades Pré-teste e Pós-teste, conforme mostra a Figura 11, sem um acréscimo expressivo em sua média.

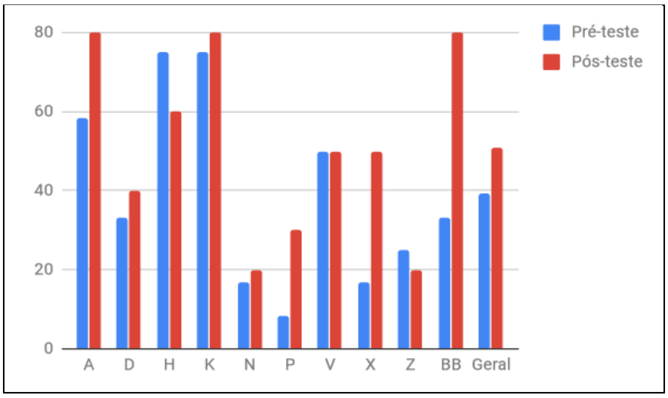
Figura 11 – Resultados dos alunos que consideraram fácil o conteúdo de frações.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Na Figura 12, apresentam-se os resultados dos alunos que consideraram o conteúdo de frações difícil. Apesar desta colocação, a maioria (80%) obteve resultados melhores, passando da média 39 pontos para 51 pontos.

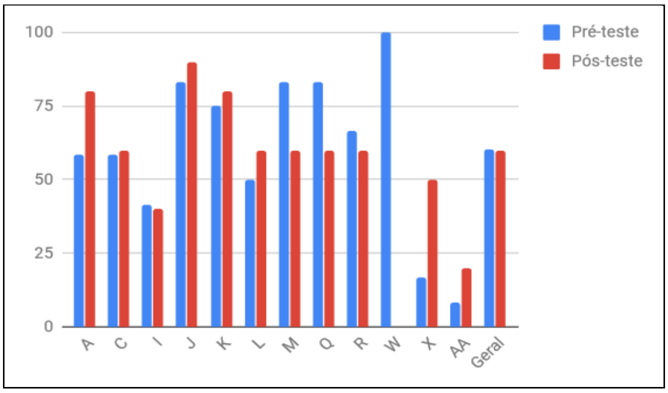
Figura 12 – Resultados dos alunos que consideraram difícil o conteúdo de frações.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Na Figura 13, apresentam-se os resultados do Pré-teste e Pós-teste para os alunos que responderam entender as ordens dos exercícios apenas lendo. Observa-se que 7 desses alunos tiveram resultados melhores, porém 4 não. A média da turma ficou basicamente a mesma. Apesar da aparente autonomia, para alguns há a necessidade de um maior acompanhamento para verificar se, de fato, esses alunos entendem os enunciados e os conceitos trabalhados.

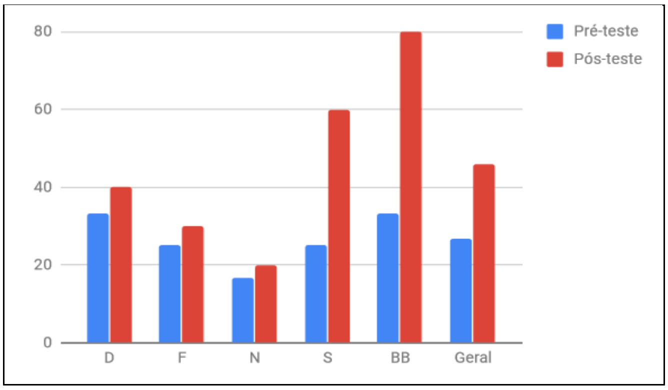
Figura 13 – Resultados dos alunos que responderam entender as ordens dos exercícios.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Já na Figura 14, apresentam-se os resultados dos alunos que relataram entender as ordens dos exercícios somente após a ajuda da professora. Apesar desses alunos possuírem uma maior dependência da professora, foi o grupo que, em sua totalidade, apresentou uma evolução entre os testes. Pelo gráfico observa-se que dois dos alunos melhoraram em mais de 100%, atingindo 60% e 80% no Pós-teste, respectivamente.

Figura 14 – Resultados dos alunos que responderam entender as ordens dos exercícios com a ajuda da professora.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Considerações Finais

Apesar dos resultados entre o Pré-teste e o Pós-teste não apresentarem uma diferença muito grande, os resultados trazem que os alunos que apresentavam maiores dificuldades, os quais consideravam o estudo de frações difícil, obtiveram uma melhora significativa em seu desempenho. Neste sentido, considera-se que as atividades envolvendo o pensamento algébrico contribuíram para esta evolução e que, de modo geral, colaboraram com o aprendizado de frações por parte da turma.

O foco da presente pesquisa está na representação na forma algébrica, no entanto, nas atividades propostas, apresentaram-se também exercícios contemplando a forma geométrica, buscando-se facilitar o entendimento por parte dos alunos, o que se demonstrou produtivo, pois os estudantes puderam estabelecer relações e argumentar de diferentes formas.

Por ser algo que exige o raciocínio, o pensamento algébrico precisa ser trabalhado sempre que possível, de forma a melhorar a argumentação e raciocínio dos alunos. O pensar algebricamente desde o Ensino Fundamental propicia aos estudantes um melhor entendimento matemático, conforme orienta os PCNs (BRASIL, 1997), corroborado pela concepção de Ripoll *et al.* (2011) e Lima *et al.* (2012), mencionados inicialmente.

Referências

BIANCHINI, E. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática**: fazendo a diferença. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Revista Quadrante**, Portugal, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARVALHO, S. A. **Pensamento Genérico e Expressões Algébricas no Ensino Fundamental**. 2010. 257 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, Porto Alegre, 2010.

CHAVANTE, E. **Convergências**: Matemática. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

FREIRE, R. S. **Objetivos de Aprendizagem para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental**. 2007. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

GAY, M. R. G. (Editora responsável). **Projeto Araribá**: Matemática. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014.
GASKELL, G. Entrevistas individuais e grupais. In: BAUER, M. W.; GASKELL, G.

(Orgs.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático. 10. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

I-TECH. International Training & Education Center On HIV. **Orientações para Pré e Pós- teste**. Washington, 2008. Disponível em: <http://disciplinas.famerp.br/fhIII/Ati/MED%202016%20FH%20I%20Gui%C3%A3o%20Sobre%20AVALIA%C3%87%C3%83O%20PR%C3%89VIA%20e%20POSTERIOR.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2018.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**, v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2012.

NUNES, S. S. **Estudo de frações por meio do pensamento algébrico com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental**. 2018. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul, 2018.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números Racionais, Reais e Complexos**. 2. ed. rev. ampl. Porto Alegre, RS: UFRGS, 2011.

ROSA, M. V. F. P. C.; ARNOLDI, M. A. G. C. **A entrevista na pesquisa qualitativa**: mecanismos para validação dos resultados. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

SILVA, D. P. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I**. 2012. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, 2012.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

VELOSO, D. S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental**: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. Ouro Preto 2012. 245 f. Tese (Mestrado em Educação) – Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2012.